Zkouška lineární algebra II 25/V/2006 skupina A

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	Σ

Prosím:

- pište čitelně,
- řešení každého příkladu napište na list, kde je zadání,
- nezapomeňte každý list podepsat,
- nepoužívejte pomůcky jako skripta, poznámky z přednášky, kalkulačky, a podobně,
- a vypněte všechny pípáky, které s sebou máte.

Odpověď u každého příkladu zdůvodněte, například pouhý numerický výsledek bez objasnění postupu je téměř bezcenný.

---

1. Označme A_n matici $n \times n$, která má na hlavní diagonále a dvou sousedních diagonálách samé jedničky a všude jinde nuly, např. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, atd. Dále označme $D_n = \det(A_n)$.

(a) Vyjádřete D_n co nejjednodušeji pomocí $D_{n-1}, D_{n-2}, \ldots$. **5**

(b) Spočítejte D_{1000}. **5**

2. Definujte pojmy: podobné matice, diagonizovatelná matice. **5**
Formulujte a dokažte větu popisující nutnou a postačující podmínku pro to, aby matice byla diagonizovatelná. **10**

3. Nechť A je reálná matice $m \times n$ tvořená pouze kladnými čísly, $b \in \mathbb{R}^m$ je nezáporný vektor a $c \in \mathbb{R}^n$ je také nezáporný vektor. Označme (P) a (D) primární a duální úlohu:

$$
(P) \quad \begin{array}{rcl} \max & c^T x & \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rcl} \min & b^T y & \\ y^T A & \geq & c^T \\ y & \geq & 0 \end{array}
$$

Dokažte či vyvraťte: Pak (P) i (D) mají optimální řešení. **15**

4. Pro každé z následujících tvrzení zdůvodněte, zda platí či neplatí.

(a) Je-li A celočíselná matice a $\det(A)$ je roven 1 nebo -1, pak A^{-1} je rovněž celočíselná. **5**

(b) Pro každé dvě matice A, B typu $n \times n$ platí: Součet vlastních čísel matice $(A + B)$ je roven společnému součtu vlastních čísel matic A a B. **5**

(c) Má-li matice A jediný (až na násobky) vlastní vektor $(1, 0, 0)^T$, pak neexistuje A^{-1}. **5**

Zkouška lineární algebra II 25/V/2006 skupina B

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	Σ

Prosím:

- pište čitelně,
- řešení každého příkladu napište na list, kde je zadání,
- nezapomeňte každý list podepsat,
- nepoužívejte pomůcky jako skripta, poznámky z přednášky, kalkulačky, a podobně,
- a vypněte všechny pípáky, které s sebou máte.

Odpověď u každého příkladu zdůvodněte, například pouhý numerický výsledek bez objasnění postupu je téměř bezcenný.

1. Označme A_n matici $n \times n$, která má na hlavní diagonále a na sousední dolní diagonále samé jedničky, na sousední horní diagonále samé mínus jedničky a všude jinde nuly, např. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$,
$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dále označme $D_n = \det(A_n)$.

(a) Vyjádřete D_n co nejjednodušeji pomocí $D_{n-1}, D_{n-2}, \ldots$. **5**

(b) Spočítejte D_{11}. **5**

2. Definujte pozitivně definitní matice. **5**
Formulujte a dokažte (alespoň) jednu další ekvivalentní podmínku na pozitivní definitnost matice. **10**

3. Nechť A je libovolná reálná matice velikosti $m \times n$. Uvažte následující lineární program:

$$\begin{array}{lrcll} & \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{t.ž.} & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j & \leq & 0 & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Dokažte či vyvraťte: Pak nastává právě jedna z následujících dvou možností:

- buď $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$ je optimální řešení,
- nebo úloha není omezená. **15**

4. Pro každé z následujících tvrzení zdůvodněte, zda platí či neplatí.

(a) Jsou-li A i A^{-1} celočíselné matice, pak $\det(A)$ i $\det(A^{-1})$ je roven 1 nebo -1. **5**

(b) Pro každé dvě matice A, B typu $n \times n$ platí: Součin vlastních čísel matice (AB) je roven společnému součinu vlastních čísel matic A a B. **5**

(c) Má-li matice A jediný (až na násobky) vlastní vektor $(1, 0, 0)^T$, pak není diagonizovatelná. **5**

Zkouška lineární algebra II 8/VI/2006 skupina A

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	Σ

Prosím:

- pište čitelně,
- řešení každého příkladu napište na list, kde je zadání,
- nezapomeňte každý list podepsat,
- nepoužívejte pomůcky jako skripta, poznámky z přednášky, kalkulačky, a podobně,
- a vypněte všechny pípáky, které s sebou máte.

Odpověď u každého příkladu zdůvodněte, například pouhý numerický výsledek bez objasnění postupu je téměř bezcenný.

---

1. Co víte o charakteristických polynomech podobných matic? Přesně formulujte a dokažte. **15**

2. Rozhodněte, zda matice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -8 \\ 4 & 3 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ jsou podobné. **15**

3. Uvažte následující tvrzení: Je-li účelová funkce úlohy $\max\{c^T x \;:\; Ax \leq b,\; x \geq 0\}$ shora neomezená (kde A je matice reálných čísel velikosti $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$), pak existuje index i, $1 \leq i \leq n$, takový, že účelová funkce úlohy $\max\{x_i \;:\; Ax \leq b,\; x \geq 0\}$ je shora neomezená.

(a) Dokažte či vyvraťte tvrzení. **8**

(b) Platí tvrzení, pokud implikaci obrátíme? **7**

4. Pro každé z následujících tvrzení zdůvodněte, zda platí či neplatí.

(a) Objem rovnoběžnostěnu (v $\mathbb{R}^3$ se standartním skalárním součinem) daného vektory $(1,2,3)^T$, $(0,4,5)^T$ a $(1,0,1)^T$ je větší, než objem rovnoběžnostěnu daného vektory $(1,0,1)^T$, $(2,4,0)^T$ a $(3,5,1)^T$. **5**

(b) Pro každé dvě matice A, B (typu $n \times n$) komplexních čísel platí: Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla matice A a $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ vlastní čísla matice B (každé vlastní číslo bereme s jeho algebraickou násobností), pak $\lambda_1 \cdot \lambda'_1, \dots, \lambda_n \cdot \lambda'_n$ jsou vlastní čísla matice (AB). **5**

(c) Kvadratická forma $f(x) = x^T \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x$ na $\mathbb{R}^2$ nabývá pouze záporných hodnot, s vyjímkou vektoru $x = (0,0)^T$. **5**

Zkouška lineární algebra II 8/VI/2006 skupina B

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	Σ

Prosím:

- pište čitelně,
- řešení každého příkladu napište na list, kde je zadání,
- nezapomeňte každý list podepsat,
- nepoužívejte pomůcky jako skripta, poznámky z přednášky, kalkulačky, a podobně,
- a vypněte všechny pípáky, které s sebou máte.

Odpověď u každého příkladu zdůvodněte, například pouhý numerický výsledek bez objasnění postupu je téměř bezcenný.

---

1. Co víte o vlastních vektorech příslušných k různým vlastním číslům dané matice? Přesně formulujte a dokažte. **15**

2. Rozhodněte, zda matice $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -8 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ jsou podobné. **15**

3. Uvažte následující lineární program:

$$\begin{aligned} &\min(-x_1 - 2x_2) \\ \text{t.ž.} \quad & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Nalezněte optimální řešení. **8**

(b) Dokažte (svému šéfovi neznalému lineáního programování, ale znalého středoškolské matematiky a vládnoucímu zdravým rozumem), že opravdu máte optimální řešení. **7**

4. Pro každé z následujících tvrzení zdůvodněte, zda platí či neplatí.

(a) Objem rovnoběžnostěnu (v $\mathbb{R}^3$ se standartním skalárním součinem) daného vektory $(1,2,3)^T$, $(0,4,5)^T$ a $(1,0,1)^T$ je větší, než objem rovnoběžnostěnu daného vektory $(1,0,1)^T$, $(2,4,0)^T$ a $(5,3,1)^T$. **5**

(b) Pro každé dvě matice A, B (typu $n \times n$) komplexních čísel platí: Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla matice A a $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ vlastní čísla matice B (každé vlastní číslo bereme s jeho algebraickou násobností), pak $\lambda_1 + \lambda'_1, \ldots, \lambda_n + \lambda'_n$ jsou vlastní čísla matice $(A + B)$. **5**

(c) Kvadratická forma $f(x) = x^T \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x$ na $\mathbb{R}^2$ nabývá pouze nezáporných hodnot. **5**

Zkouška lineární algebra II 13/VI/2006 skupina A

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	Σ

Prosím:

- pište čitelně,
- řešení každého příkladu napište na list, kde je zadání,
- nezapomeňte každý list podepsat,
- nepoužívejte pomůcky jako skripta, poznámky z přednášky, kalkulačky, a podobně,
- a vypněte všechny pípáky, které s sebou máte.

Odpověď u každého příkladu zdůvodněte, například pouhý numerický výsledek bez objasnění postupu je téměř bezcenný.

---

1. a) Uveďte přesnou definici determinantu matice. **5**

b) Co víte o determinantu součinu dvou matic? Přesně formulujte a dokažte. **10**

2. a) Napište znění Sylvestrova zákona setrvačnosti kvadratických forem. **3**

b) Mějme kvadratickou formu f (na vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^3$) danou předpisem

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

a nechť B je nějaká taková báze vektorového prostoru V, že f má vůči ní diagonální matici (není-li B jednoznačná, vyberte si libovolnou).
Najděte matici přechodu od báze B ke kanonické bázi. **12**

3. Nechť A je matice velikosti $m \times n$ se všemi složkami kladnými, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je vektor se všemi složkami nezápornými a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ je vektor se všemi složkami nezápornými.

a) Napište duální program k lineárnímu programu $\min \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ za podmínek $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{c}^T, \mathbf{y} \geq 0$. **5**

b) Dokažte, že primární i duální úloha mají optimální řešení. **10**

4. Pro každé z následujících tvrzení zdůvodněte, zda platí či neplatí.

a) Pro každé dvě čtvercové matice A a B platí: mají-li matice A a B stejná vlastní čísla (včetně násobností), pak A a B jsou podobné matice. **5**

b) Pro každou celočíselnou čtvercovou matici A typu $n \times n$ platí: je-li v absolutní hodnotě každé vlastní číslo matice A rovno jedné, pak pro každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení, a toto řešení je celočíselné. **5**

c) Pro každou čtvercovou matici A platí: je-li A pozitivně definitní matice, pak A má na diagonále kladná čísla. **5**

Zkouška lineární algebra II 13/VI/2006 skupina B

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	Σ

Prosím:

- pište čitelně,
- řešení každého příkladu napište na list, kde je zadání,
- nezapomeňte každý list podepsat,
- nepoužívejte pomůcky jako skripta, poznámky z přednášky, kalkulačky, a podobně,
- a vypněte všechny pípáky, které s sebou máte.

Odpověď u každého příkladu zdůvodněte, například pouhý numerický výsledek bez objasnění postupu je téměř bezcenný.

1. a) Uveďte přesnou definici pozitivně definitních matic. **5**

b) Co víte o rozkladu pozitivně definitní matice na součin dolní a horní trojúhelníkové? Přesně formulujte a dokažte.
(Nevíte-li, jak postupovat, uvažte rozklad matice na součin matic odpovídajících vhodným elementárním řádkovým úpravám.) **10**

2. a) Napište znění Sylvestrova zákona setrvačnosti kvadratických forem. **3**

b) Mějme kvadratickou formu f (na vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^3$) danou předpisem

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

a nechť B je nějaká báze vektorového prostoru V, že f má vůči ní diagonální matici (není-li B jednoznačná, vyberte si libovolnou).
Najděte matici přechodu od kanonické báze k bázi B. **12**

3. Nechť $A = I$ je jednotková matice velikosti $n \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ je vektor se všemi složkami nezápornými, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je vektor s první složkou zápornou (tj. $c_1 < 0$) a ostatními složkami nezápornými.

a) Napište duální program k lineárnímu programu $\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$. **5**

b) Nalezněte optimální řešení primární i duální úlohy. **10**

(Nevíte-li, jak postupovat, zkuste vyřešit problém nejprve pro případ, kdy vektor $\mathbf{c}$ má všechny složky nezáporné.)

4. Pro každé z následujících tvrzení zdůvodněte, zda platí či neplatí.

a) Pro každé dvě čtvercové matice A a B platí: mají-li matice A a B stejné charakteristické polynomy, pak A a B jsou podobné matice. **5**

b) Pro každou čtvercovou matici A platí: má-li matice A alespoň jedno vlastní číslo nulové, pak má soustava $A\mathbf{x} = 0$ více než jedno řešení. **5**

c) Pro každou symetrickou čtvercovou matici A platí: má-li A pouze záporná vlastní čísla, pak $(-A)$ je pozitivně definitní matice. **5**

Zkouška lineární algebra II 20/VI/2006 skupina A

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	Σ

Prosím:

- pište čitelně,
- řešení každého příkladu napište na list, kde je zadání,
- nezapomeňte každý list podepsat,
- nepoužívejte pomůcky jako skripta, poznámky z přednášky, kalkulačky, a podobně,
- a vypněte všechny pípáky, které s sebou máte.

Odpověď u každého příkladu zdůvodněte, například pouhý numerický výsledek bez objasnění postupu je téměř bezcenný.

1. a) Uveďte přesnou definici ortogonální matice. **3**

b) Dokažte: i) reálná symetrická matice má všechna vlastní čísla reálná,

ii) má-li reálná symetrická matice A (velikosti $n \times n$) n různých vlastních čísel, pak existuje reálná ortogonální matice R taková, že $R^{-1}AR$ je diagonální matice. **12**

2. Nechť $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Pokud existují, najděte následující rozklady:

a) $A = U^T U$, kde U je horní trojúhelníková matice, **6**

b) $A = P^T P$, kde P je pozitivně definitní matice. **9**

3. Uvažte následující lineární program:

$$\begin{array}{rrcl} & \max 3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{t.ž.} & -2x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & \leq & 2 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

(a) Převeďte úlohu do podoby vhodné pro simplexový algoritmus (tzv. rovnicový tvar). **2**

(b) Nalezněte všechna bázická řešení Vámi vytvořené úlohy a určete, která z nich jsou přípustná. **5**

(c) Nalezněte (libovolným korektním způsobem) optimální řešení původní úlohy. **3**

(d) Sestrojte duální úlohu k původní úloze. **5**

4. Pro každé z následujících tvrzení zdůvodněte, zda platí či neplatí.

a) Pokud $AS = S \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ a S je regulární matice, pak $-1/2, -2/3$ a $-3/4$ jsou vlastní čísla matice $(A - I)$. **5**

b) Pro každou čtvercovou matici A platí: je-li A ortogonální matice, pak $|det(A)| = 1$. **5**

c) Pro každé dvě čtvercové matice A a B platí: je-li alespoň jedna z matic A, B regulární, pak AB a BA mají stejný charakteristický polynom. **5**

Zkouška lineární algebra II 20/VI/2006 skupina B

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	Σ

Prosím:

- pište čitelně,
- řešení každého příkladu napište na list, kde je zadání,
- nezapomeňte každý list podepsat,
- nepoužívejte pomůcky jako skripta, poznámky z přednášky, kalkulačky, a podobně,
- a vypněte všechny pípáky, které s sebou máte.

Odpověď u každého příkladu zdůvodněte, například pouhý numerický výsledek bez objasnění postupu je téměř bezcenný.

---

1. a) Uveďte přesnou definici vlastních čísel a vlastních vektorů lineárního zobrazení. **5**

b) Dokažte: jsou-li $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ navzájem různá vlastní čísla lineárního zobrazení f a $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ odpovídající vlastní vektory, pak $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ jsou lineárně nezávislé. **10**

2. a) Najděte ortogonální matici Q, která diagonalizuje matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(tj., chceme A s užitím Q převést na diagonální matici). **10**

b) Napište přesné znění věty zaručující existenci Q v části a). **5**

3. Uvažte následující lineární program:

$$\begin{aligned} &\max(3x_1 + x_2) \\ \text{t.ž.} \quad & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Nalezněte optimální řešení. **4**

(b) Sestrojte duální úlohu. **4**

(c) Nalezněte lineární kombinaci řádků primární úlohy ukazující, že hodnota účelové funkce v optimálním řešení primární úlohy je nejvýše 29/3. **4**

(d) Nalezněte optimální řešení duální úlohy. **3**

4. Pro každé z následujících tvrzení zdůvodněte, zda platí či neplatí.

a) Pro každé dvě čtvercové matice A a B platí: jsou-li A a B ortogonální matice, pak i AB je ortogonální matice. **5**

b) Pro matici $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ existuje rozklad $C = U^T U$, kde U je komplexní horní trojúhelníková matice. **5**

c) Pokud $AS = S \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ a S je regulární matice, pak $3/2, 4/3$ a $5/4$ jsou vlastní čísla matice $(A + I)$. **5**